





RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Secundaria-ONE 2010
Pruebas de 2°/3° año y 5°/6° año de la Educación Secundaria.

ONE 2010

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Secundaria-ONE 2010
Pruebas de 2°/3° año y 5°/6° año de la Educación Secundaria.

ONE 2010

AUTORIDADES

Presidenta de la Nación
Dra. CRISTINA FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

Ministro de Educación
Prof. ALBERTO ESTANISLAO SILEONI

Secretario de Educación
Lic. JAIME PERCZYK

Jefe de Gabinete
A.S. PABLO URQUIZA

Subsecretario de Equidad y Calidad Educativa
Prof. EDUARDO ARAGUNDI

Subsecretaria de Planeamiento Educativo
Prof. MARISA DEL CARMEN DIAZ

Directora Nacional de Información
y Evaluación de la Calidad Educativa
Dra. LILIANA PASCUAL

DEPARTAMENTO DE EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA:
Mg. Mariela Leones

ELABORADO POR:
Prof. Andrea Novembre

EQUIPO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA:
Prof. Liliana Bronzina
Prof. Pilar Varela
Lic. Nora Burelli

ASISTENCIA TÉCNICO-PEDAGÓGICA:
Prof. Natalia Rivas

LECTURA CRÍTICA:
Prof. Horacio Itzcovich

Agradecemos la lectura y los comentarios a los docentes:
Prof. Susana Lidia Corral
Lic. María Teresa Pisarri
Lic. Rosa María Humbert

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:

Karina Actis
Juan Pablo Rodriguez
Coralia Vignau

Este documento se terminó de elaborar en septiembre del año 2011

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las pruebas de matemática evaluaron en el 2010 la totalidad de estudiantes que finalizaban la Educación Secundaria y una muestra de los que cursaban 2°/3° año de ese nivel.

Las mismas tuvieron como finalidad determinar el estado de situación de los alumnos de diferentes jurisdicciones del país en relación con algunos contenidos y capacidades cognitivas del área.

¿CÓMO ESTUVIERON CONSTITUIDAS LAS PRUEBAS?

Es importante considerar que son pruebas masivas, es decir, se aplican a la totalidad o muestras muy grandes de alumnos y que, por lo tanto, tienen una estructura que les es propia. Un análisis puntual de las mismas puede complementar la información obtenida de las evaluaciones realizadas día a día por los docentes en su trabajo de aula.

Las pruebas estuvieron constituidas por 30 actividades, ítems cerrados o de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta cada uno, y dos actividades o ítems de respuesta abierta a desarrollar.

La inclusión de actividades de respuesta abierta permitió evaluar los procesos, los recursos y conocimientos puestos en juego por los alumnos para dar cuenta de un procedimiento o de una estrategia de resolución elegida y de su relación con la respuesta presentada.

Con el fin de atender especialmente al procedimiento de resolución y no solo al resultado, las actividades de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los docentes utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco (omitida) [1].

Habiendo accedido a las respuestas dadas por los alumnos, hemos seleccionado algunas que por sus características, nos invitan a reflexionar no sólo sobre su nivel de conceptualización, sino también sobre sus posibilidades concretas de resolución en función de los contenidos que se ponen en juego.

En el caso de los ítems abiertos nos aportan, además, una variedad

[1] *Ver Anexo para ejemplo de una grilla de corrección.*

de datos acerca de los recursos que los alumnos están en condiciones de utilizar en esta etapa de su escolaridad secundaria para describir los procedimientos utilizados en la resolución y la racionalidad desplegada, cuestión que aunque resulte compleja por estar vinculada a lo metacognitivo, da cuenta del tipo de trabajo matemático con el que pudieron o no vincularse en su trayectoria escolar.

Por ello, este informe tiene como propósito compartir con ustedes algunas de las situaciones que los alumnos tuvieron que resolver y una serie de comentarios y análisis realizados sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están en la base de los mismos.

Asimismo, aunque los fines y las características de esta prueba difieren en gran medida de los utilizados cotidianamente en las aulas, no dudamos puedan aportar información útil sobre las dificultades y logros más frecuentes en los alumnos, y al mismo tiempo, proveer algunas sugerencias para trabajar en clase, con el fin de enriquecer la tarea pedagógica, pudiendo ser adaptadas por los docentes a su contexto y a la realidad de sus alumnos y de su escuela.

LOS NIVELES DE DESEMPEÑO

El desempeño de los alumnos en matemática se agrupó en tres niveles para cada año evaluado: alto, medio y bajo.

Los mismos se han determinado a partir de criterios empíricos y pedagógicos, en relación con los rendimientos de los alumnos en la prueba. Cada uno de los niveles es inclusivo en relación con el inmediatamente inferior, es decir, en la medida en que un alumno está ubicado en un determinado nivel, tiene alta probabilidad de resolver con éxito las actividades del mismo y las de los inferiores a aquél.

De este modo, la discriminación de estos niveles facilita la comunicación de lo que los alumnos saben y pueden hacer.

A continuación, analizaremos problemas que corresponden a los distintos niveles de desempeño de los alumnos del 2°/3° año de su escolaridad y de Fin de Educación Secundaria de 2010.

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES EVALUADAS

En esta ocasión hemos decidido presentar y analizar, conjuntamente, las actividades abiertas y sus resoluciones correspondientes a los dos niveles educativos evaluados.

Problema de los floreros

Uno de los problemas que se planteó para los alumnos del 2°/3° año fue el siguiente:

1 En dos floreros se colocan 54 flores. Si en el primero se colocan la mitad de las flores que en el segundo. ¿Cuántas flores hay en cada florero?

Mostrá como lo resolvés.

....

....

....

....

P09 M9 A1 IT01

Se trata de un problema que puede resolverse desde un marco aritmético o bien desde uno algebraico, aunque la mayoría de los alumnos que resolvió esta prueba eligió el camino aritmético.

Contenido:	Número y Operaciones
Capacidad Cognitiva:	Resolución de problemas
Desempeño:	Resolver un problema que involucra relaciones entre variables.

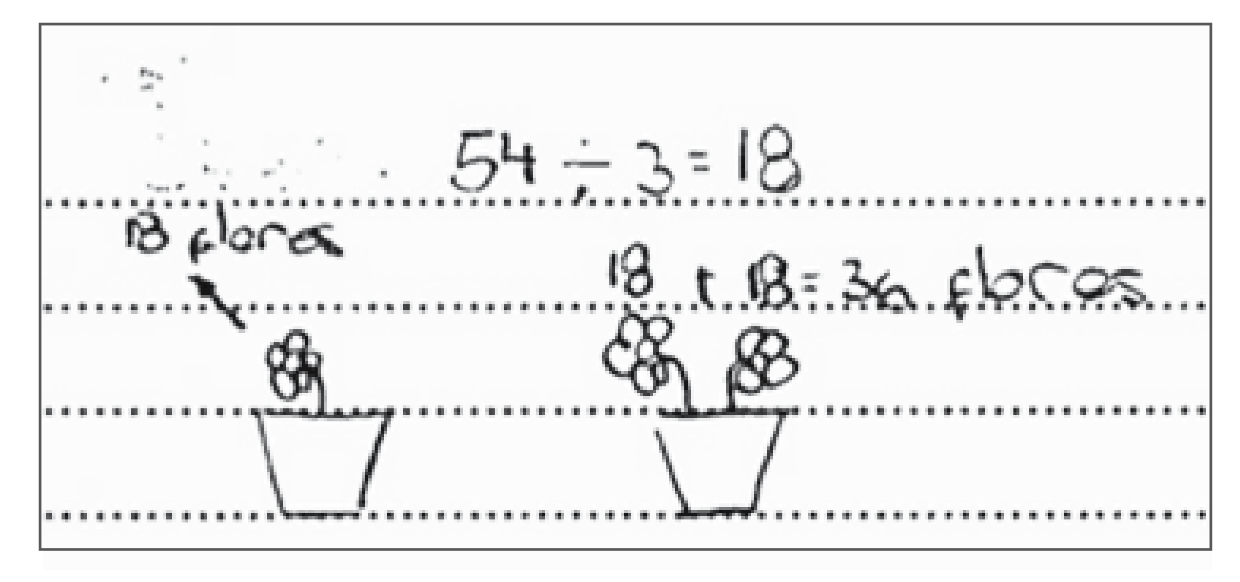
Se calcularon los porcentajes que corresponden a cada tipo de respuesta en función de las resoluciones proporcionadas por los alumnos. Además, hubo un 9,3% de respuestas omitidas.

Correcta	11,4%
Parcialmente correcta	1,2%
Incorrecta	87,4%

Las siguientes son algunas resoluciones de alumnos que utilizaron estrategias aritméticas.

Ejemplo I

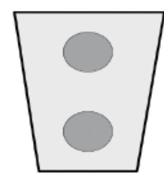
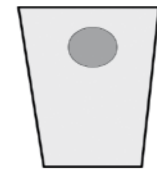
Hay casos donde los alumnos proponen un gráfico, a modo de una figura que permite el análisis de la situación. Seguramente es a partir de allí que logran determinar la necesidad de dividir por 3.



"RTA: En un florero hay 18 flores y en otro 36 flores."

Análisis

Una resolución apoyada en el marco aritmético puede pensarse de la siguiente manera:

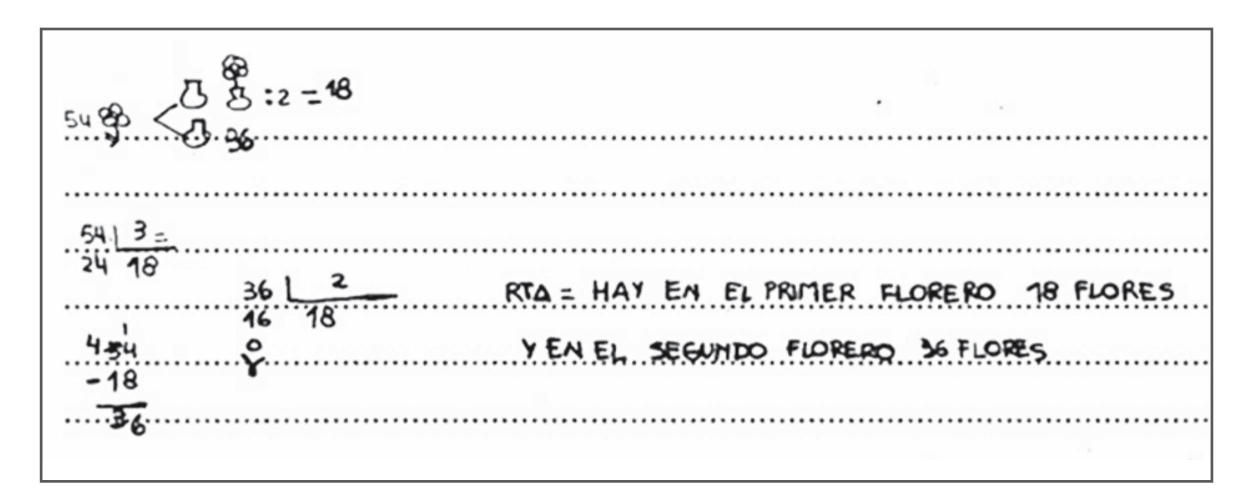



Un dibujo como el anterior plantea una relación: que la cantidad de flores que hay en uno es la mitad de la cantidad de flores que hay en el otro o bien, la cantidad de flores que hay en uno es el doble de las que hay en el otro, según cuál sea el florero que se considere en primera oportunidad y cuáles sean esos números. Entonces, si la cantidad de flores de uno de ellos es un valor, la cantidad de flores del otro será dos veces ese valor, o si la cantidad de flores en uno es un valor cualquiera, la cantidad de flores en el otro será la mitad de ese valor.

Se trata de una representación que encierra una generalidad: la rayita en uno de los floreros representa una cantidad desconocida de flores, mientras que las dos rayitas será el doble de esa cantidad.

Se tienen entonces tres partes iguales entre los dos floreros, entre las que hay 54 flores en total. Luego, al dividir el total por 3 se obtiene el valor de cada una de esas partes, 54 ÷ 3 = 18 y a partir de allí puede decirse que uno de los floreros tiene 18 flores, mientras que el otro tiene 18 × 2 = 36.

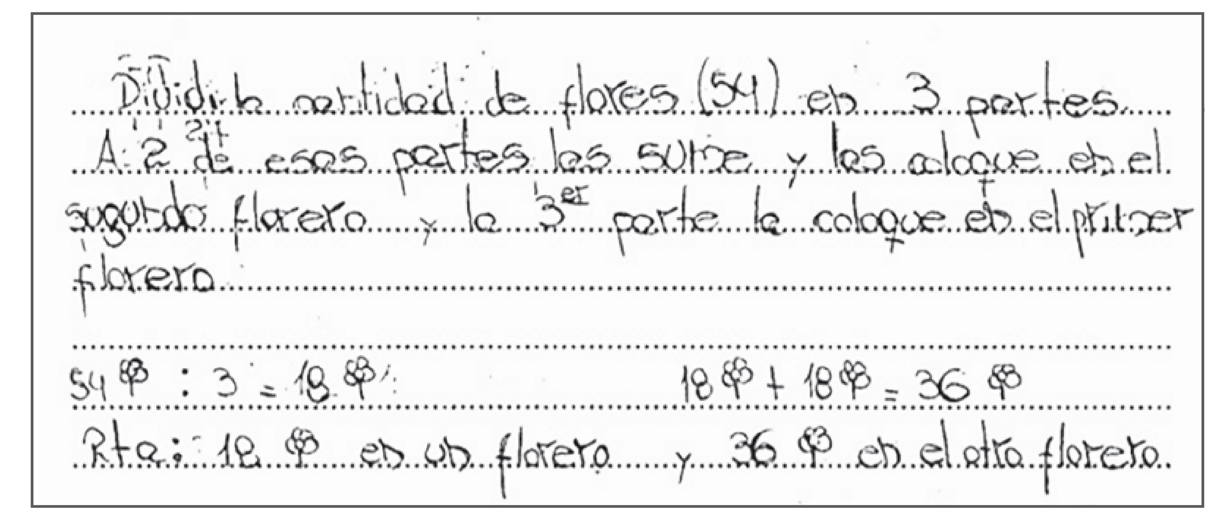
Ejemplo 2



"Rta= hay en el primer florero 18 flores y en el segundo florero 36 flores."

Este alumno primero busca la cantidad de flores en el florero que tiene mayor cantidad para luego hallar su mitad, que no es el camino más habitual.

Ejemplo 3


Dividi la cantidad de flores (54) en 3 partes.
A 2 de esas partes las sume y las coloque en el
segundo florero y la 3er parte la coloque en el primer
florero

54 ✿ : 3 = 18 ✿   18 ✿ + 18 ✿ = 36 ✿
Rta: 18 ✿ en un florero y 36 ✿ en el otro florero.

"RTA: "Dividi la cantidad de flores (54) en 3 partes. A 2 de esas partes las sume y las coloque en el segundo florero y la 3er parte la coloque en el primer florero."

En este caso se cuenta detalladamente los pasos de la resolución. Sin embargo, el alumno no da una explicación de por qué considera 3 partes, por qué divide por 3. Es interesante detenerse en las razones que los alumnos brindan para validar su trabajo. ¿Cuánto de esto resulta evidente para él? ¿Cuánto hay que no sabe realmente explicar?

Darse cuenta que es necesario dividir el total por 3 no es nada simple. Fundamentalmente porque ese valor no se corresponde con ningún dato del problema. Pero ni siquiera aparece vinculado al triple o tercera parte de algo, sino que surge a partir de que una cantidad sea el doble de la otra. Los dobles y mitades siempre conducen a los alumnos a pensar en multiplicaciones y divisiones por 2, pero nunca por otro número. Al menos a primera vista.

Ejemplo 4

Busque un Número (18) y lo sumé, me dio como resul-
tado (36) por lo cuál sume 36 + 18 y llegue a 54.
osea que la respuesta es que en un florero hay 36
flores y en el otro hay 18 flores.

"RTA: "Busque un número (18) y lo sumé, me dio como resultado (36) por lo cuál sumé 36 + 18 y llegué a 54, o sea que la respuesta es que en un florero hay 36 flores y en el otro hay 18 flores."

Esta resolución parece haber sido hecha a través de ensayos y errores. El alumno busca un número, que luego duplica y suma al anterior para ver si obtiene 54. No queda claro cómo hace para encontrarlo, ya que pudo haber probado o también utilizado alguna estrategia más elaborada. Seguramente no llegó a él a través de un único ensayo, sino que necesitó hacer ajustes a partir de las suma de los valores (el número y su doble). Las estrategias de ensayo y error pueden ser azarosas, donde el alumno piensa un número cualquiera y se fija si verifica la situación, o pueden ser controladas. En este último caso estaríamos frente a un alumno que, por ejemplo aventura que la respuesta al problema es 20, analiza que 20 + 20 + 20 = 60, que se pasa por 6 unidades de 54 y decide sacarle 2 a cada 20. De esa manera encuentra la respuesta 18. Si bien el primer valor es cualquiera, es usado para encontrar la solución al problema a partir de retroacciones y ajustes.

Ejemplo 5

54 flores   1 Florero tiene 18 flores y el otro
54 |3   Tiene 36 flores.
24 18
0   I Florero   II Florero
↓ $\frac{2}{3}$ ↓ $\frac{1}{3}$

En este caso se propone un planteo similar a los anteriores, pero donde además la respuesta es expresada como una proporción. Si de las 3 partes en que se considera dividido el total, en un florero hay 2 y en el otro 1 parte, entonces les toca respectivamente $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ del total. No queda claro si el alumno se apoyó en la noción de proporción o si es una relación que halló posteriormente.

Ejemplo 6

RTA: En el primer florero habrán 18 flores y en el se gundo 36.

54 |3
24 18
0

"RTA: En el primer florero habrán 18 flores y en el segundo 36. (Dividí 54 por 3, así sea de dos partes se les colocan a uno y el que sobra (18) acaba siendo la mitad)"

Aquí no queda claro de qué modo y en qué momento este alumno resolvió la división: pudo haber hecho primero un reparto con palitos que luego verificó con una división, o al revés. Si hizo la división en primer lugar, es posible que haya decidido mostrar de una manera más gráfica por qué ese resultado era efectivamente uno posible. Si en primer lugar hizo los palitos, es probable que no haya considerado esa estrategia de resolución lo suficiente matemática, por lo que decidió mostrar, además, un cálculo que de alguna manera avale su hallazgo.

En cualquiera de los dos casos, una sola manera de resolver el problema no parece satisfacer a este alumno.

Ejemplo 7

La resolución que propone el siguiente alumno está enmarcada en el trabajo algebraico:

1er Florero = X cantidad de Flores
2do Florero = X:2 cantidad de Flores
X + X:2 = 54 — 3x = 108 — R: Un florero 36 flores y el Otro 18 flores
X:2 = 54 - X — X = 108:3
X = (54-X).2 — 1er: X = 36
X = 108-2X — 2do: X:2 = 18
X+2X = 108
O09 M9 A1 IT 01

El problema de los floreros también puede resolverse desde un marco algebraico, a partir del planteo de ecuaciones. Por ejemplo, si se considera que x es la cantidad de flores en el florero que tiene mayor cantidad, resulta que:

$$\frac{1}{2}x + x = 54$$

$$\frac{3}{2}x = 54$$

$$x = 36$$

Pero a partir de aquí es necesario hallar la mitad de 36 para saber la cantidad de flores que hay en el otro florero.

De manera análoga, si x representa la cantidad de flores en el florero que tiene menor cantidad, las ecuaciones cambian por las siguientes:

$$x + 2x = 54$$

$$3x = 54$$

$$x = 18$$

Y para finalizar, es necesario calcular el doble de 18, que es la cantidad de flores en el florero que tiene más.

Es de notar que en ninguno de los casos es posible obtener la respuesta completa al problema, ya que solo se obtiene la cantidad de flores en uno de los floreros. Es necesario volver al problema para determinar el segundo valor pedido.

Ejemplo 8

1/2 X:2 = 54 — RTA: Se colocan en el florero Nº1 13 ó 14
X:2 = 54:2 — flores y en el segundo florero 41 ó 40.
X = 27:2
X = 13,5

"Rta: Se colocan en el florero N°1 13 ó 14 flores y en el segundo florero 41 ó 40."

Este alumno plantea una ecuación incorrecta, pero que puede dar cuenta de qué pensó. Considera un valor desconocido, que no define, lo duplica y luego considera su mitad. Pareciera estar poniendo en una sola expresión el hecho de que mientras uno de los floreros tiene el doble, el otro la mitad.

Al obtener una respuesta decimal, 13,5, el alumno la interpreta en términos del problema. Sabe que la cantidad de flores tiene que ser un número entero y así redondea el valor obtenido, con lo cual logra dos pares de posibles soluciones.

$\frac{1}{2}x + x = 54$ $\quad 36 \cdot 2 = 72$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1+2}{2}$

$\frac{3}{2}x = 54$

$x = 54 : \frac{2}{3}$ $\quad 108 \,|\, 3$ $\quad 18 \;\; 36$

1er florero = 36 flores

$x = \frac{108}{3}$ $\quad$ 2do florero = 72 flores

$x = 36$

En este caso, la ecuación que se plantea es la correcta, pero el alumno luego no logra interpretar qué representa la solución que obtuvo en términos del problema. Supone que es la cantidad de flores en el florero que tiene menos cantidad, por lo que luego duplica para encontrar la cantidad de flores que hay en el otro florero.

Una cuestión interesante es que luego de hacer esto, suma y ve que el total ya no es 54, sino 108. Esto no hace, sin embargo, que cambie de estrategia.

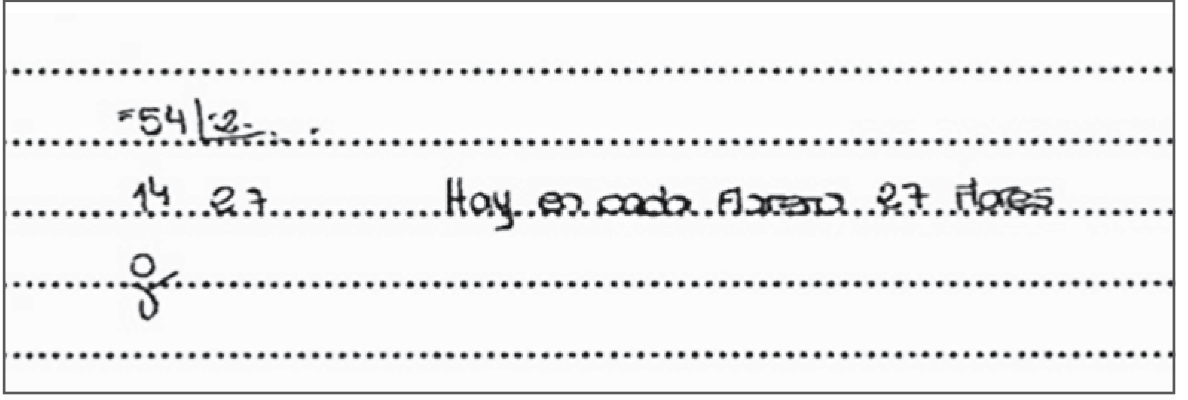
Si analizamos lo que el estudiante escribe, vemos que en uno de los pasos en la resolución de la ecuación tiene que hallar 108/3, que efectivamente hace. Luego, los valores que obtiene, 36 y 72, suman 108, que no es otro que el valor que aparece en su ecuación. Se trata entonces de pensar qué representan las variables, dónde es necesario reemplazar el o los valores obtenidos para analizar si resuelven el problema, etc.

LA PALABRA "MITAD" Y LAS DIFICULTADES QUE PLANTEA

La palabra "mitad" ha sido una fuente de resoluciones incorrectas. Algunos ejemplos son los siguientes:

Ejemplo 9

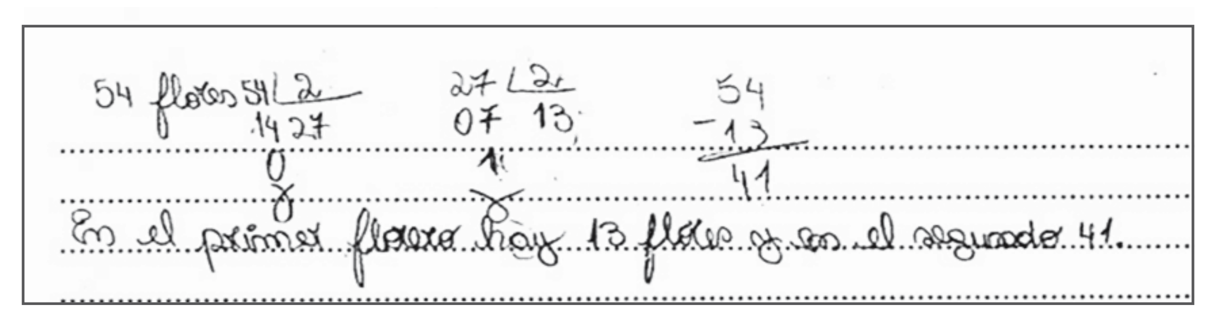
Una cantidad importante de alumnos consideraron que cada florero contenía la mitad del total de las flores.



"Hay en cada florero 27 flores."

Ejemplo 10

Una cantidad no despreciable de alumnos resolvió el problema de la siguiente manera:



"En el primer florero hay 13 flores y en el segundo 41."

Suponemos que la necesidad de repartir las flores entre los dos floreros los lleva a dividir por dos. Seguramente no encuentran otra manera de dividir en dos partes que no sea equitativa. Una vez hecha esa división, vuelven a dividir teniendo en cuenta la relación de mitad entre las cantidades de flores.

Ahora bien, el 27, que proviene de dividir a 54 por 2 no vuelve a ser usado. El alumno calcula la cantidad restante buscando la diferencia con 54. No corrobora que 13 no es la mitad de 41 ni tampoco le llaman la atención los valores que encuentra.

Ejemplo 11

Este estudiante proporciona a 13 y 27 como las soluciones, aunque la suma de 13 y 27 no es 54.

El hecho que la división entre 27 y 2 no tenga resto cero no parece ser un problema para los alumnos que eligieron este camino, quienes o bien dan un valor decimal como respuesta o lo redondean a uno de los enteros más cercanos.

Es posible que estos estudiantes solo interpreten que hay que repartir, la división se usa para repartir y no pueden avanzar a partir de esa idea.

Ejemplo 12

"1ro se colocan 13,5 redondeando 14
2do se colocan 27
En el primer florero hay 14 y en el segundo 27."

Frente a este tipo de resolución incorrecta, donde el contexto serviría como una fuente para controlar el o los resultados que se obtienen, encontramos que los alumnos no siempre tienen esta práctica. Estos estudiantes resuelven, y esa es su respuesta. No se revisa, no se vuelve para atrás. Pero, ¿por qué sucede esto? Todos tenemos y hemos tenido alumnos que lo hacen solos, sin que nadie se los diga. A otros ni se les cruzaría por la cabeza.

En estas resoluciones, muchas veces los alumnos controlan que se verifique una de las condiciones (la relación de mitad-doble o que la suma de las dos cantidades sea 54). Pero frente a un planteo incorrecto, el controlar una de ellas lleva necesariamente a perder la otra. Lo que hemos observado es que para estos estudiantes alcanza con controlar solo una de estas condiciones que plantea el problema.

"Rta: En uno hay 40 ❀ y en el otro 14 ❀"

"Rta: En un florero hay 40 y en otro 14"

"En un florero hay 13,5 flores y en el otro 30,5 flores."

"54 flores -2 floreros
½ flores - 1° florero
54 ÷ 2 = 27
1° florero = 14 flores = 27 ÷ 2
2° florero = 40 flores = 13 + 27"

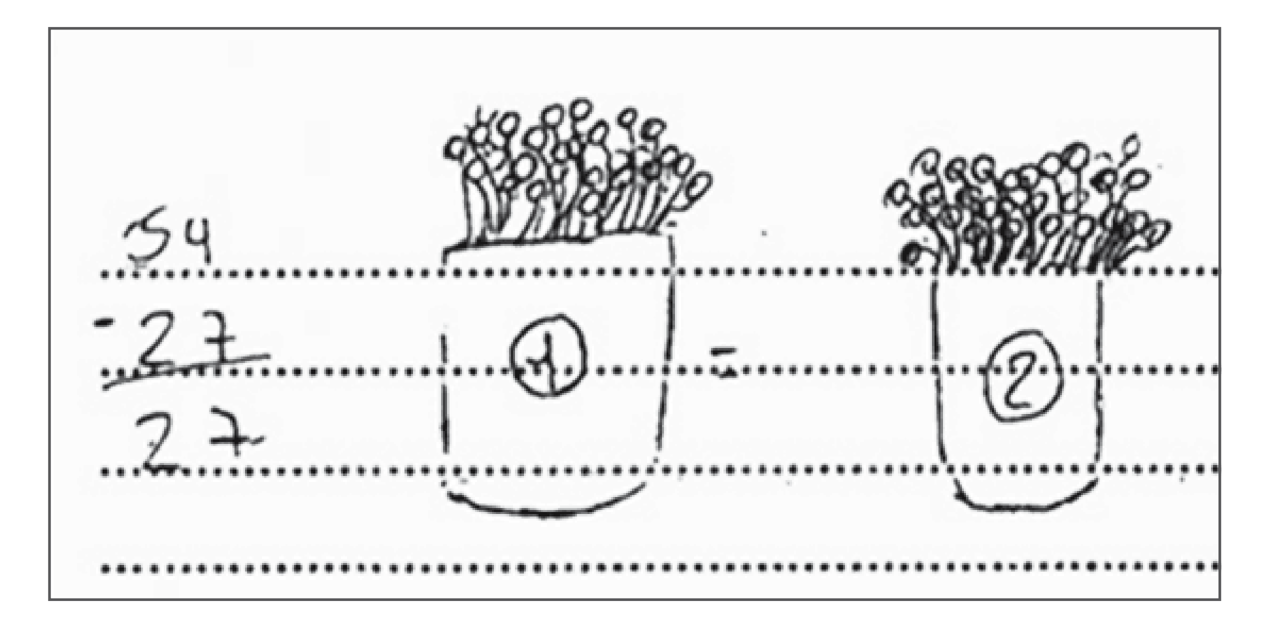
Ejemplo 13

"Rta= En un florero hay 36 flores y en el otro 18."

Este alumno intentó hacer varios cálculos (dividir, multiplicar), pero la respuesta la encontró a través de un ensayo.

Ejemplo 14

Aquí solo se busca la mitad de 54 para luego indicar que los floreros tienen la misma cantidad de flores.



PROBLEMAS PARA UNA ENTRADA AL ÁLGEBRA

Muchos docentes asocian el álgebra con la resolución de ecuaciones y el trabajo con variables. Acordamos con esta afirmación, aunque pensamos que el álgebra incluye mucho más. Se trata, desde nuestra perspectiva, de una aritmética generalizada de números y cantidades, entre otros aspectos.

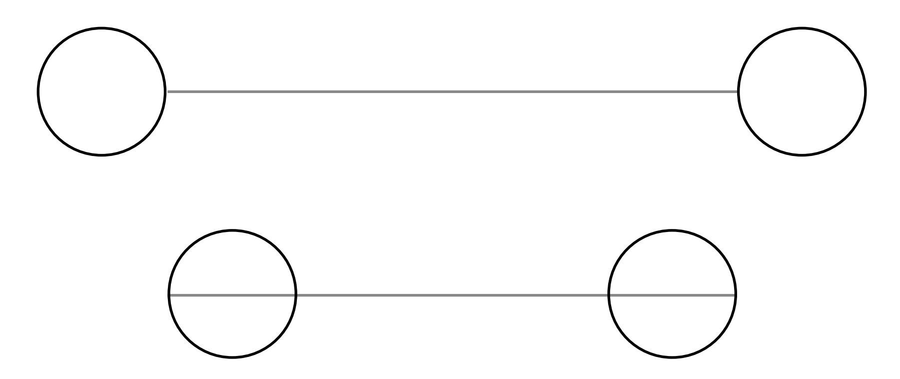
Sostenemos que lo algebraico es un contenido de enseñanza que no es exclusivo de la escuela secundaria, sino que se inicia en la escuela primaria. Aparece en los problemas de contexto, en contenidos como operaciones, razones y proporciones, números, medidas, formas de representación (rectas numéricas, gráficos, tablas, notación aritmética, etc.).

Consideramos que solo se pueden introducir las ecuaciones y un trabajo sobre la sintaxis algebraica luego de que los alumnos se familiarizan con conceptos y representaciones de variables y funciones.

Muchas veces, las dificultades que muestran los alumnos de secundaria con cuestiones algebraicas es el resultado de su experiencia previa con enseñanzas –muchas veces avaladas por currículos– que se centran exclusivamente en operaciones y cuestiones aritméticas. Muchos investigadores sugieren que estas dificultades provienen de la falta de experiencia en generalizaciones aritméticas y algebraicas, que deberían ser parte del currículum aritmético. Es así que los problemas que presentan los estudiantes no son específicos del álgebra, sino dificultades aritméticas que no han sido debidamente resueltas.

En cuanto a problemas como el que se planteó en la prueba, donde los alumnos necesitaban interpretar y traducir una relación particular entre variables, Abraham Arcavi[2] afirma:

> "Tomamos como ejemplo de este aspecto, algo que reexaminamos de uno de los clásicos de la literatura de educación de la matemática: el problema de los estudiantes y los profesores.
>
> "Escribir usando las variables A y P, la siguiente afirmación: hay 6 veces más alumnos que profesores en esta universidad" (Clement, 1982).
>
> Este hallazgo en Clement (1982) demuestra que más del 30% de 150 estudiantes de primer año de ingeniería que contestaron en el examen no lograron resolver correctamente el problema. La típica respuesta incorrecta que se registró fue 6A=P. Estos hallazgos se condicen con otros obtenidos cuando se investigaba en qué manera los alumnos resolvían este problema.
>
> Creemos que al menos para algunos de los estudiantes, este error no es una manifestación de un concepto erróneo profundo acerca de la noción de la variable, como tampoco es una equivocación o concepción errónea grave el creer que los dos segmentos paralelos de la figura siguiente tienen longitudes diferentes.



> En la figura, los círculos actúan como un marco de distracción, algo que nos distrae de la referencia la cual inclina fuertemente, influye y predispone nuestra percepción de la longitud de los dos segmentos.
>
> Al igual que como el mismo Clement señala, en el problema de los estudiantes y los profesores, existe un distractor de lenguaje, por ejemplo el orden de las palabras claves (seis veces la misma cantidad de estudiantes) lo cual podría desviar (o influir sobre) nuestro entendimiento hacia la traducción literal palabra por palabra tal como 6A=P.
>
> En este caso no podemos afirmar que el tener sentido de símbolo vaya necesariamente a evitar cometer error. Muchos estudiantes y profesores pueden caer frente a estos distractores lingüísticos mientras construyen un modelo simbólico para los problemas de este tipo y cometen el error.
>
> Lo que sí decimos, en este caso, es que el sentido de símbolo consistiría en desarrollar el saludable hábito o costumbre de releer y controlar (por simple sustitución, por ejemplo) la razón de la expresión simbólica que uno ha construido. El estar alerta y el saber que uno puede ser víctima de "ilusiones simbólicas" puede que no impida ni evite un error de concepción, pero puede reforzar la necesidad de controlar y poder así superarlo."

Muchos alumnos cometen el error descripto por Arcavi, pues creen que pueden traducir el texto a símbolos tal como aparece en la oración. También es posible que confundan la semántica de la oración, que crean que la ecuación 6A=P da cuenta de que una mayor cantidad de estudiantes se corresponde con una menor cantidad de profesores. La ecuación correcta no describe las cantidades de cada grupo, sino que es una relación de equivalencia que indica que si la cantidad de profesores se multiplica por 6 coincidirá con la cantidad de alumnos. El producto es necesario para igualar estas cantidades.

[2] *Arcavi (1994). Op. Cit.*

Problemas como el que señala Arcavi o aun el de la prueba requieren que el alumno comprenda el concepto de ecuación, y no se trata de una mera traducción de un enunciado a símbolos.

En la enseñanza de la resolución de problemas no solo es importante enseñar a los alumnos a encontrar diferentes estrategias de resolución, sino que también es esencial que adquieran práctica en la traducción matemática de la situación. No hablamos de la obtención de una ecuación porque no es una condición necesaria, pero siempre es preciso que los alumnos logren hacer algún tipo de traducción que permita matematizar la situación.

Problema

La siguiente actividad[3] tiene por objetivo evidenciar ciertas reglas de escritura de una ecuación de primer grado con una incógnita, por un lado, y por el otro, identificar expresiones que sean una traducción matemática correcta del problema.

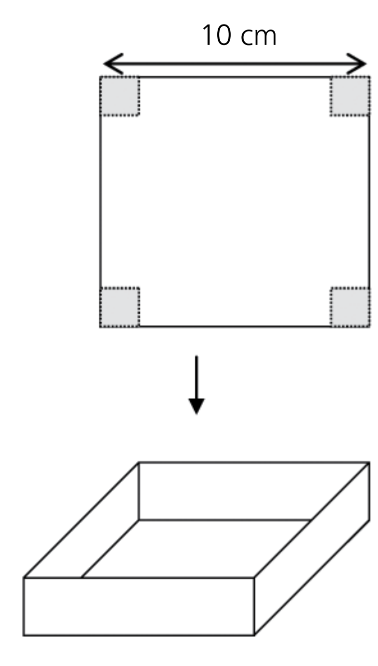
La clase se divide en una cantidad par de grupos, de 3 ó 4 alumnos cada uno. En una primera etapa, la mitad de los alumnos de la clase (grupos A) tratan de poner en ecuación el problema 1, mientras que la otra mitad (grupos B) hace lo mismo con el problema 2.
Los alumnos no deben resolver el problema, sino solamente escribir una o varias ecuaciones que permitan resolverlo, pero pueden presentar una sola propuesta.

Los problemas son los siguientes:

Problema 1
Se dispone de cierto cuadrado. Si se aumenta la longitud del lado en 6 cm, se obtiene un nuevo cuadrado cuya área es 84 cm2 más que el área del primero. ¿Cuál es la medida del lado del primer cuadrado?

Problema 2
Se dispone de una placa de cartón cuadrado de 10 cm de lado. En cada esquina de la placa se corta un cuadrado.

[3] *Tomada de Combier et al (1996). Op. Cit.*



Se obtiene entonces el desarrollo de una caja con forma de prisma, sin tapa. ¿Cuál debe ser la medida del cuadrado que se corta en cada esquina para que el volumen de la caja sea de 72 cm^3?

En una segunda etapa, los grupos A y B intercambian sus enunciados y sus propuestas de ecuaciones. Cada grupo A debe pronunciarse sobre la validez de la ecuación propuesta por un grupo B y viceversa.

Al finalizar la clase, el profesor informa a sus alumnos que las ecuaciones que propusieron serán resueltas por una computadora y que las traerá la clase siguiente.

La segunda clase se plantea de manera colectiva con el objetivo de analizar las diferentes ecuaciones que los alumnos propusieron para resolver cada problema. Se centra el debate en la elección de las variables y la validez de la ecuación elegida.

El profesor proporciona las soluciones de cada ecuación dadas por la computadora para que los alumnos las contrasten con el enunciado de cada problema.

Luego se analizan las ecuaciones con más de una variable o con más de una ecuación. Se plantea a los alumnos si es posible "resumir" el problema en una sola ecuación con una incógnita.

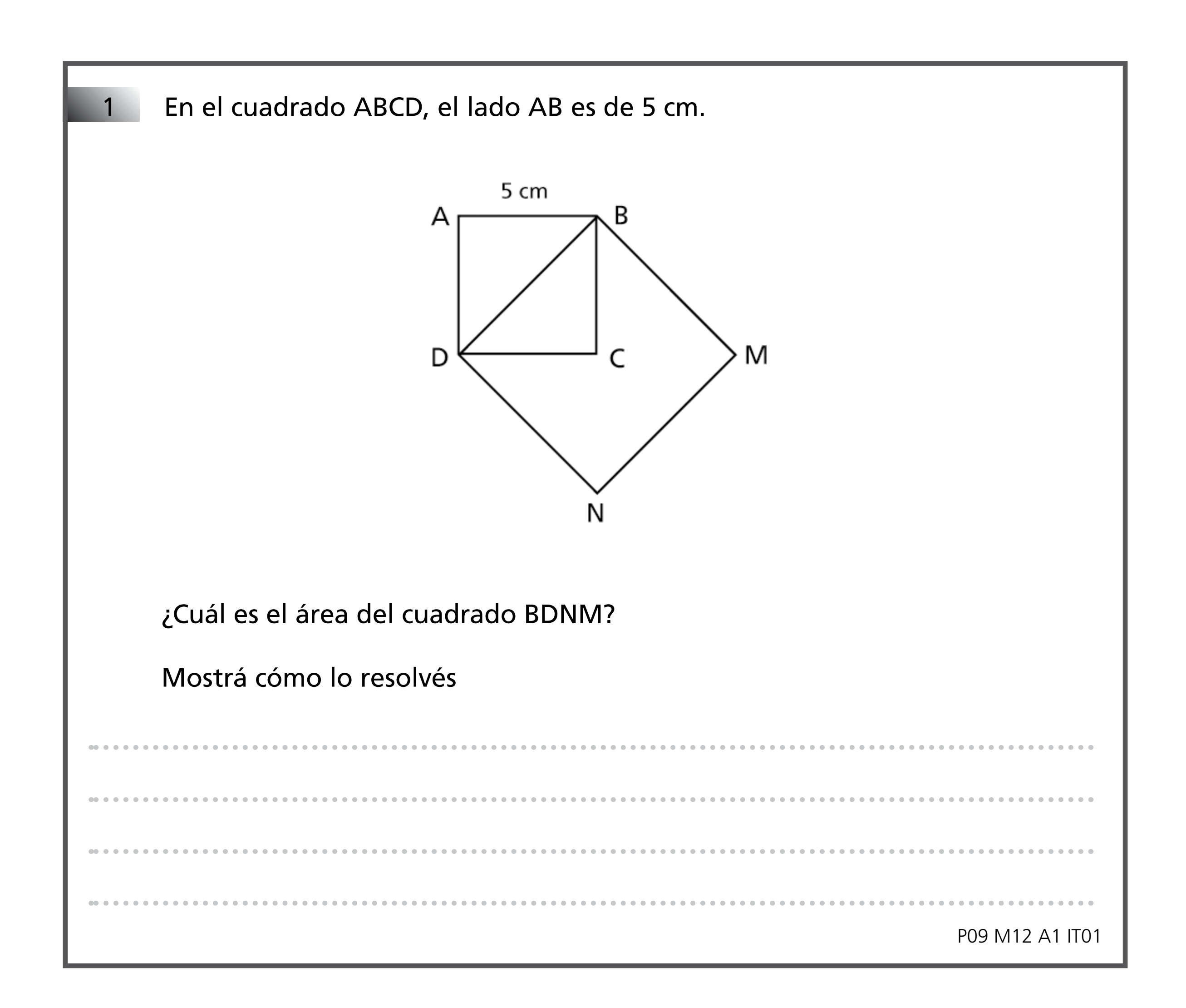
La existencia de la "computadora" que resuelve las ecuaciones hace que los alumnos puedan centrarse en la escritura de la ecuación, por más compleja que les parezca, ya que no será su responsabilidad encontrar la solución. De ese modo, el debate podrá basarse en las escrituras y su pertinencia.

La elección de los problemas y su grado de dificultad hace que la discusión pueda efectivamente centrarse en las ecuaciones. Seguramente no hubiese podido darse si éstas fuesen simples lineales. Por otro lado, al no tener la necesidad de resolverlos pueden plantearse situaciones complejas e impensables para alumnos de los primeros años de la escuela media.

Planificar un recorrido que recupere los saberes aritméticos de los alumnos, los pongan en funcionamiento, y los acompañen en la entrada en el álgebra es una deuda pendiente de la enseñanza.

Problema del área del cuadrado

El siguiente problema se utilizó para evaluar a los alumnos del último año de escolaridad secundaria:



1 En el cuadrado ABCD, el lado AB es de 5 cm.

¿Cuál es el área del cuadrado BDNM?

Mostrá cómo lo resolvés

P09 M12 A1 IT01

Contenido:	Geometría y Medida
Capacidad Cognitiva:	Resolución de problemas
Desempeño:	Resolver un problema que involucra el uso del Teorema de Pitágoras. Cálculo de áreas.

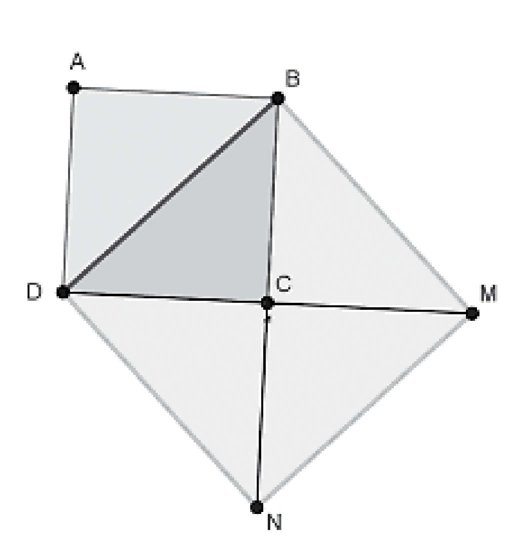
Se calcularon los porcentajes que corresponden a cada tipo de respuesta en función de las resoluciones proporcionadas por los alumnos. Además, hubo un 32,3% de respuestas omitidas.

Correcta	27,9%
Parcialmente correcta	11,7%
Incorrecta	60,4%

Se trata este de un problema que permite poner en juego diferentes estrategias:

- Proponer el cálculo directo del área del cuadrado *BDNM* , para lo cual es necesario hallar la medida de su lado.
  La medida del lado BD puede encontrarse a través del Teorema de Pitágoras, pues es la hipotenusa del triángulo rectángulo BAD o BCD, ambos isósceles de lados iguales de 5 cm.
  Luego, $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$ y el área del cuadrado BDNM es $\sqrt{50}\,\text{cm} \times \sqrt{50}\,\text{cm} = 50\,\text{cm}^2$.

- Reconstruir el área del cuadrado a partir del área del triángulo BCD, como muestra la figura.



El triángulo BCD es $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado BMND, por lo que el área del cuadrado es 4 veces el área de ese triángulo. Para hallar el área de $B\overset{\Delta}{D}C$ es preciso disponer de su base y altura, que en este caso miden 5 cm cada una, luego:

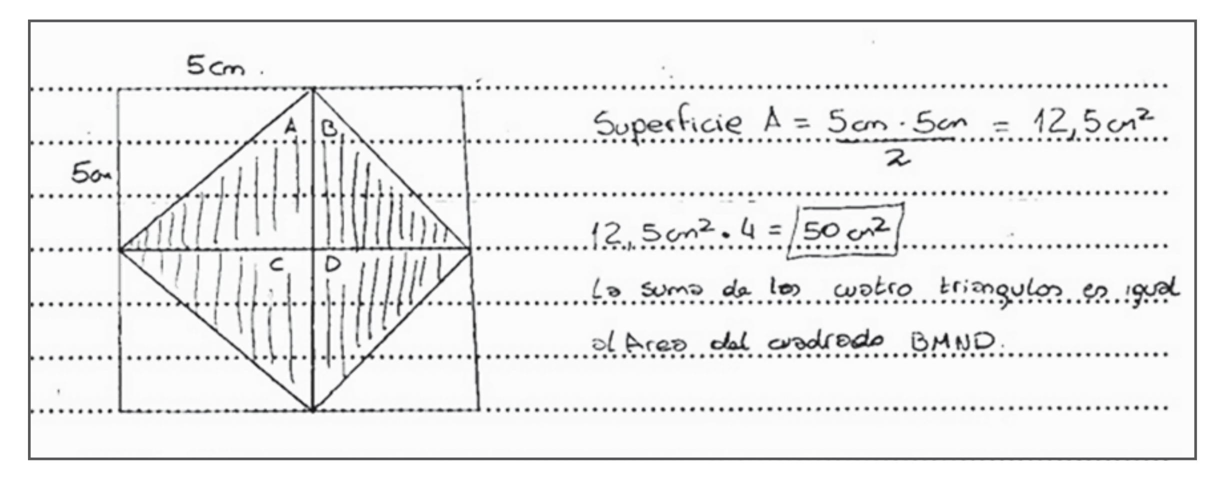
$$\text{Área de } B\overset{\Delta}{D}C = \frac{5\text{cm} \times 5\text{cm}}{2} = 12{,}5\text{cm}^2$$

y el área del cuadrado BDNM es 4 × 12,5 cm^2 = 50 cm^2.

La misma relación puede usarse de la siguiente manera: el área del triángulo BCD es la mitad del área del cuadrado ABCD y la cuarta parte del área de BDNM. Luego, el área del cuadrado ABCD es la mitad del área del BDNM. Como el área de ABCD es 5 × 5 = 25 cm^2, entonces el área de BDNM es 2 × 25 cm^2 = 50 cm^2.

Ejemplos de resoluciones de alumnos

Ejemplo 15



"La suma de los cuatro triángulos es igual al Area del cuadrado BMND"

El ejemplo anterior utiliza una estrategia de comparación de áreas.

Ejemplo 16

lado BD, CD, BC = 5cm
B
= (Área: b.h/2). 5.5cm/2cm = 25cm/2 = 12,5cm
D C Área del 1er triáng.
"Son 4 triáng." a total sin contar el resuelto;
□ Área 12,5cm x 4 = 50.0 cm 4 Δ que quedan =
Área del □ = 500cm²
(BDNM)

El alumno anterior propone una estrategia correcta de resolución pero comete un error en el cálculo del área del cuadrado. Más allá de la dificultad que puede plantear operar con decimales, nos parece importante reflexionar sobre el control de los resultados, tal como dijimos anteriormente[4]. ¿Qué es lo que hace que estos estudiantes no se pregunten por la coherencia del resultado que obtienen? ¿Qué hace que no le resulte extraño que 4 veces 12,5 dé 500?

Si bien hay alumnos para los cuales el control de los resultados se constituye en una práctica habitual, para muchos otros no lo es. Es decir, existen estudiantes que por sí mismos deciden controlar sus resultados mientras que otros no lo hacen. Ahora bien, ¿cómo sabe un alumno que conviene controlar su producción? Creemos que no se trata de una práctica natural, sino que es adquirida, aprendida. Por lo tanto, deberá ser enseñada. Solo si es parte del proyecto de enseñanza de un docente, podrá trabajarse en clase sobre diferentes técnicas de estimación o de análisis de la factibilidad de ciertos resultados, por ejemplo. Para ello no solo es necesario que los estudiantes comprendan qué hacen a la hora de realizar cálculos, sino que también requiere del dominio de los diferentes conjuntos numéricos. Implica saber, por ejemplo, que en el campo de los números racionales el resultado de un producto no necesariamente es mayor o igual que los factores ni la división menor o igual que el dividendo.

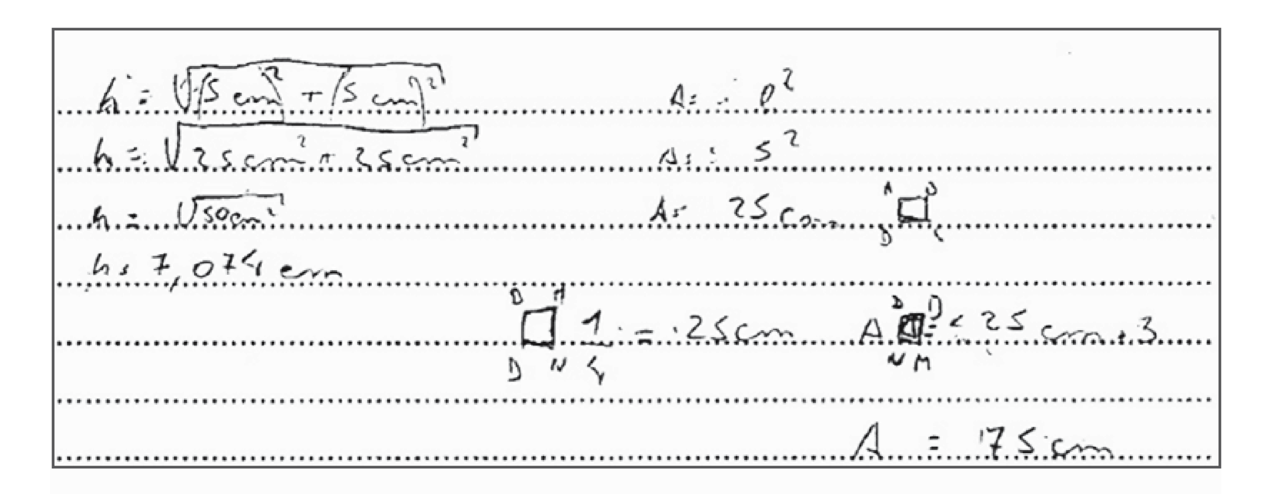
[4] En el ejemplo 12 planteamos una pregunta similar, que nos pareció conveniente desarrollar en este momento.

Pero también la construcción de la necesidad del control de los resultados está muy relacionada con la concepción de aprendizaje del docente y de los alumnos. Si en una clase la validación está puesta o depende del profesor, entonces los alumnos no necesitan analizar si lo que hicieron está bien, porque eso es tarea del docente. Ellos hacen y luego les dirán si está bien o mal. No estamos planteando que los alumnos no pueden hacer preguntas a sus docentes, sino que es necesario trabajar sobre cuáles son preguntas pertinentes y aceptables para hacer al docente.

Lo que nosotros buscamos es crear en los alumnos la autonomía suficiente como para que puedan tomar decisiones y hacerse cargo de la validación de sus resultados. Es decir, que decidan tanto en el momento de elegir una estrategia para resolver un problema, como también a la hora de determinar si un resultado que obtienen es o no coherente.

Ejemplo 17

La siguiente producción se inicia correctamente, con el alumno calculando la medida del lado del cuadrado BMND.

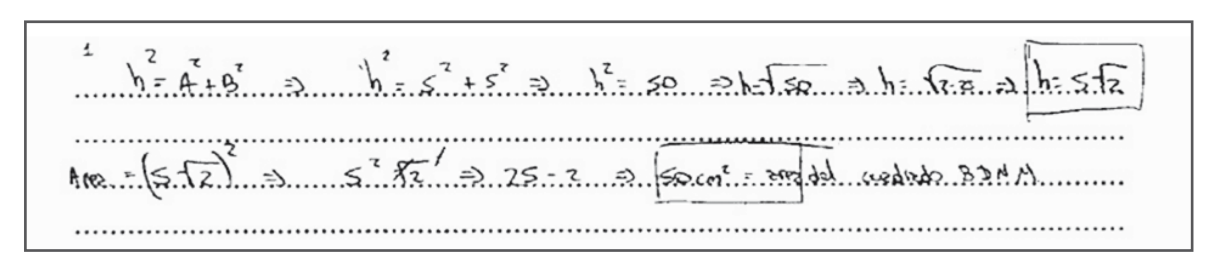


No sabemos cómo obtiene el valor de h, que se trata de la medida del lado que busca, aunque está cerca del valor real ($\sqrt{50} \approx$ 7,07106781186548). Resulta interesante analizar y comparar los casos en los que redondean el valor encontrado de manera abusiva, con los casos en que los alumnos encuentran valores que no son correctos, pero que están más cerca del valor real.

Este estudiante abandona el cálculo anterior para intentar otra estrategia. Decide que el área del cuadrado ABCD representa un cuarto del área del cuadrado BMND, lo cual no es correcto (el triángulo BCD, que es la mitad del cuadrado ABCD, es en realidad el cuarto que busca). Pero para encontrar el área total, triplica ese valor para encontrar lo que él considera tres cuartos del área buscada. O sea, el alumno confunde el área a agregar con la totalidad del área que tiene que encontrar.

También es posible que no haya comprendido qué área tiene que hallar y encontró el área de la figura que queda luego de sacar el cuadrado ABCD.

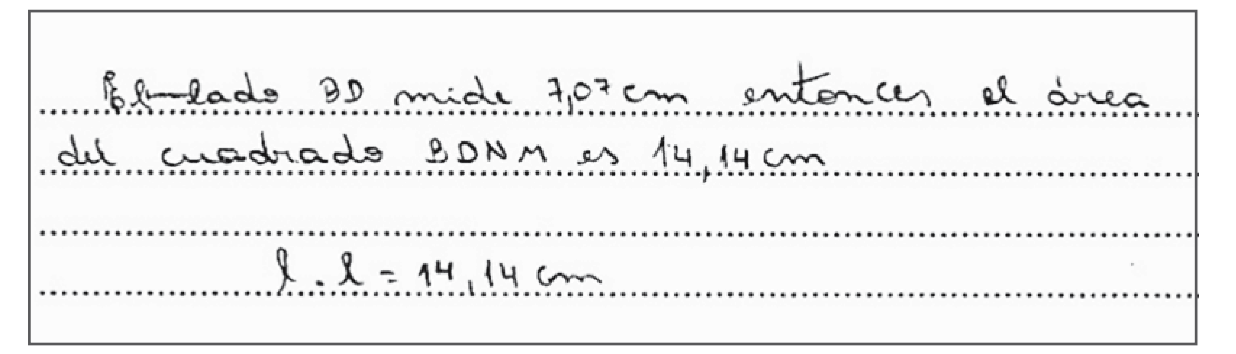
Ejemplo 18



La resolución anterior muestra un hecho interesante. El alumno encuentra la medida de la hipotenusa y del lado del cuadrado, pero en lugar de dejar el resultado como $\sqrt{50}$, decide extraer factores de la raíz para expresarlo como $5\sqrt{2}$. Si bien nada hay de incorrecto en esto, no es lo más conveniente porque se dificulta luego elevarlo al cuadrado en el cálculo del área. Pareciera que el trabajo escolar en torno de los números irracionales que se expresan como raíces se reduce a introducir o extraer factores en una raíz, racionalizar denominadores. Pero, ¿para qué sirve hacerlo? ¿Conocen los alumnos su utilidad? Se trata de técnicas que en ciertos casos son muy útiles, pero no siempre. Nuevamente, parece faltar un trabajo acerca de la conveniencia y necesidad del uso de una herramienta o técnica que no puede quedar a cargo de los alumnos. Es parte de los contenidos –no siempre explícitos- que es necesario enseñar.

Y en cuanto al trabajo con los números irracionales y las operaciones con decimales, es interesante analizar la siguiente producción.

Ejemplo 19



El alumno encuentra un valor aproximado para la medida del lado del cuadrado, por lo que todo cálculo que se haga con ella llevará consigo un error de aproximación que se va propagando. Ningún instrumento

permite medir una longitud irracional, aunque éstas existan. Es por esto que muchas veces se trabaja con aproximaciones de los valores reales, pero es necesario saber que todo lo que se calcule a partir de él portará –y tal vez aumente- el error cometido al considerarlo.

Resulta además interesante analizar que para calcular el área, este alumno pudo haber sumado las medidas de dos lados en lugar de multiplicarlos. También es posible que haya pensado que lado × lado = lado^2 para luego calcularlo como lado × 2.

Tal como señalamos en las Recomendaciones Metodológicas realizadas a partir de los resultados del ONE[5] 2007:

"La didáctica de la matemática ha estudiado las dificultades y errores de los alumnos en profundidad a la hora de trabajar en problemas referidos a áreas. Entre ellos nos interesa señalar:

- El área aparece muy vinculada a la superficie y se observan dificultades para separarla de otras características de ella, en particular, de su perímetro. Es así que los alumnos

  * confunden las fórmulas para calcular el área con las que permiten calcular el perímetro.Habitualmente se inicia la enseñanza de área y perímetro trabajando con cuadrados y rectángulos y las fórmulas correspondientes a cada uno. Es así que los alumnos disponen de dos fórmulas para el cuadrado: lado×4, para el perímetro, y lado × lado para el área. Y de esta manera es como generalmente se expresan y simbolizan. Su similitud, y la ausencia de un trabajo sobre las magnitudes, hace que los niños las confundan –y con razón-. Lo mismo sucede con el rectángulo, donde varían las fórmulas, pero ambas se apoyan en el uso de las medidas de los mismos lados.
  * consideran que si el perímetro de una superficie aumenta, también lo hace su área y viceversa.
  * piensan que si dos superficies tienen el mismo perímetro entonces también tienen igual área.

- Los niños extienden el uso de ciertas fórmulas a situaciones donde no son válidas. Es así que no es raro encontrar casos donde multiplican las medidas de dos lados consecutivos de un paralelogramo (no rectángulo) o las de los tres lados de un triángulo para hallar su área. Se trata de errores persistentes, que se observan no solo en la escolaridad primaria, sino que se arrastran a la escuela secundaria.

- Suponen que al multiplicar las dimensiones de una superficie por un número positivo k, su área también se multiplica por k."

[5] *Novembre, Andrea, 2010. Op. Cit.*

Cuando este alumno suma los lados para encontrar el área del cuadrado seguramente no se trate de un error de descuido, sino de una concepción que ha ido construyendo durante su aprendizaje. Sería importante, entonces, que se destine tiempo de enseñanza en clase para que se puedan poner estas concepciones en discusión a través de problemas muy bien seleccionados para tal fin. No se trata de volver a enseñar para que dejen de cometer estos "errores", sino de ponerlos en discusión, pensar qué informan y por qué no proveen el resultado buscado.

Un trabajo basado en el cálculo de áreas, donde el trabajo matemático consiste en identificar la fórmula que corresponde, reemplazar por las medidas necesarias para luego operar, no constituye por sí solo un trabajo geométrico. Se trata, más bien, de una aritmetización de la geometría, es decir, que los conceptos geométricos están puestos al servicio de realizar operaciones aritméticas o algebraicas.

Sería deseable que en la escuela vivan problemas que lleven a los alumnos a usar relaciones entre diferentes objetos geométricos, a usar sus propiedades.

En la siguiente sección mostramos algunos ejemplos de situaciones que permiten poner en juego los aspectos geométricos.

Ejemplo 20

BD = √(5²+5²)   ABD = (5×5)/2 = 12,5
BD ≃ 7
BDNM ≃ 7 × 7 ≃ 49   BDNM = 12,5 × 4 = 50

En este ejemplo nos encontramos nuevamente con un error de aproximación que luego se arrastra en los demás cálculos.

El alumno indica claramente que el valor de la medida de BD es aproximada y, por lo tanto también lo es el área que encuentra a partir de ese valor. Pero también resuelve el problema a través de otra estrategia, que le proporciona el resultado correcto. Ambos son recuadrados como respuestas finales, uno como valor aproximado y otro como valor exacto.

No es incorrecto, la notación que utiliza es clara. Sin embargo, ¿podemos decir que este alumno considera que 7 es una aproximación suficientemente buena de la medida del lado BD? ¿Cree que 49 es un resultado aceptable cuando la respuesta exacta es 50? Ciertamente se trata de una discusión compleja pero que tiene que ocurrir en el momento de trabajar con números racionales e irracionales.

Ejemplo 21

En el ejemplo anterior se vuelve a ver un trabajo que muestra conceptualizaciones al menos incompletas de las expresiones decimales de números irracionales y su redondeo.

El área del cuadrado le da 50,9796 cm2, que efectivamente corresponde al cuadrado de 7,14 cm. Pero el alumno escribe que este resultado es aproximadamente 50 (cuando debería aproximarse a 51).

Al igual que otros, deja dos resoluciones diferentes, que también brindan respuestas distintas, pero que el alumno se encarga de tomar como iguales.

En el caso siguiente, el estudiante encuentra el perímetro en lugar del área de la figura.

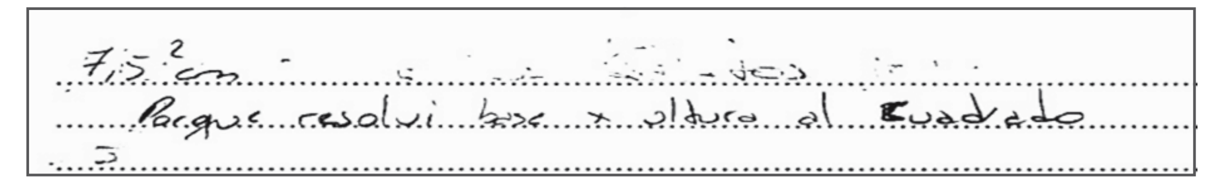
Ejemplo 22

La misma concepción errónea sobre el área se despliega en la siguiente producción:

"Para averiguar el area del cuadrado BDNM hay que:
1. Averiguar cuanto mide la diagonal del cuadrado ABCD
2. Una vez que averiguamos la diagonal del cuadrado ABCD, sabemos cuanto mide uno de los los lados del cuadrado BDNM
3. Para averiguar el área del cuadrado BDNM solo hay que sumar todos sus lados"

Los dos primeros pasos que describe son correctos, pero confunde al área con el perímetro.

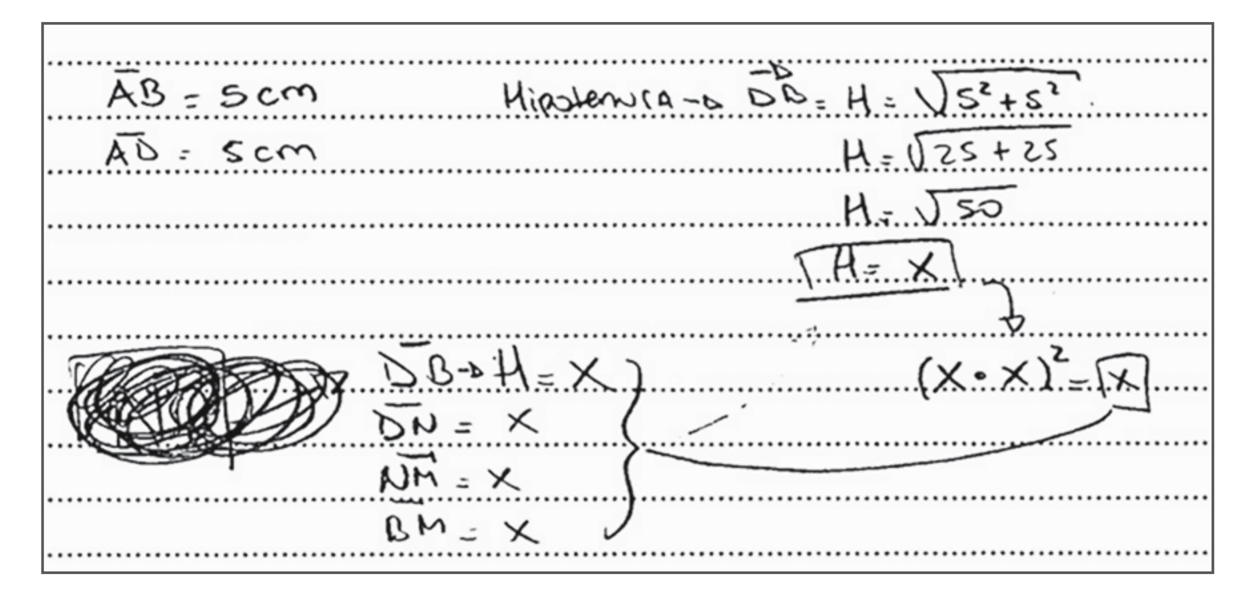
También encontramos casos en que usan una fórmula incorrecta.



"Porque resolvi base x altura al cuadrado"

Ejemplo 23

La siguiente resolución hace un uso interesante de las variables.



El alumno usa la misma letra para denotar medidas diferentes. Llama x a la medida de la hipotenusa del triángulo, que coincide con la medida del lado $\overline{DB}$. Luego aclara que los demás lados del cuadrado también miden x. Pero calcula el área en función de x y en lugar de llamarla x^2, vuelve a llamarla x.

En aritmética, no todo el trabajo se centra en el cálculo con números, sino que también están presentes las letras. Los alumnos usan letras para designar una dimensión (una longitud, por ejemplo) en las fórmulas para hallar un perímetro o un área o para designar objetos geométricos simples (puntos, rectas, segmentos, ángulos). Es así que resulta que por ejemplo, 5 m puede designar 5 metros o bien 5 manzanas, por lo que la letra m es utilizada como una "etiqueta".

A medida que se avanza en la escolaridad, las operaciones dan lugar a las ecuaciones, donde la letra designa a un número que se busca, es decir, a una incógnita. "En este punto reside la verdadera dificultad didáctica: al designar un número desconocido por una letra, se lo manipula como si fuese conocido. Los números desconocidos son pensados como números precisos, designados provisoriamente por letras, de modo que nuestra ignorancia inicial no nos impida hacerlos partícipes de un cálculo. Con la aparición de la resolución de ecuaciones más complejas en 4° año[6], que precisan de un encadenamiento de operaciones elementales sobre expresiones literales, las letras adquieren un nuevo status: "adquieren el status de indeterminadas en el sentido en que no existe más la necesidad de que esas manipulaciones representen un número" [7] .

Al entrar al álgebra se amplían los significados de las letras, ya que ahora designan números y, en consecuencia, estarán involucradas en cálculos. Las letras ya no son solo "etiquetas", sino que su status dependerá del contexto de la situación que se esté resolviendo.

Ahora bien, por diversas razones el cambio de status de las letras no es evidente para los alumnos. Por un lado, existe una continuidad en el tipo de escritura utilizada en el marco aritmético y el algebraico. Por el otro, hay propuestas docentes que refuerzan la idea de la letra como etiqueta cuando, por ejemplo se sugiere a los alumnos que para saber cuánto es 3x + 4x = 7x, piensen a la "x" como si fueran "manzanas". Así, los alumnos piensan en 3 manzanas más 4 manzanas, en lugar de pensar en el triple de un número más su cuádruple.

Recién cuando los alumnos comienzan a trabajar con funciones, utilizando gráficos y tablas, las letras comienzan a ser consideradas por ellos como números desconocidos que no son fijos. Es necesario provocar una evolución de esta concepción hacia la noción de "letra" definida por su pertenencia a un conjunto conocido de números, es decir hacia la noción de variable.

La última producción que mostramos da cuenta de un alumno que utiliza la letra como etiqueta, ya que la utiliza para nombrar una medida (una longitud o un área).

El uso de las letras en la resolución de problemas puede constituirse en una ayuda o en un obstáculo. Según palabras de Guy Brousseau:

[6] *Nota del trad.: 4° en Francia equivale a nuestro 8° año de escolaridad.*
[7] *Germi (1997). Op. Cit.*

« La noción de obstáculo didáctico permite contemplar una renovación de los análisis de los fracasos en los procesos de enseñanza-aprendizaje. La noción de obstáculo didáctico es desarrollada por los trabajos de Brousseau en Didáctica de la Matemática. Define esta noción en un sentido muy particular: se trata de un conocimiento antiguo, perteneciente a la historia del sujeto, que fue útil para resolver ciertos problemas en un momento dado, pero que no permite responder de modo satisfactorio a una nueva clase de problemas. Para resolverlos, el sujeto debería acceder a nuevos conocimientos, pero la existencia del "conocimiento-obstáculo" constituye un atractivo que impide el avance. El obstáculo debe entonces ser objeto de un trabajo de deconstrucción - reconstrucción.»[8]

Ejemplo 24

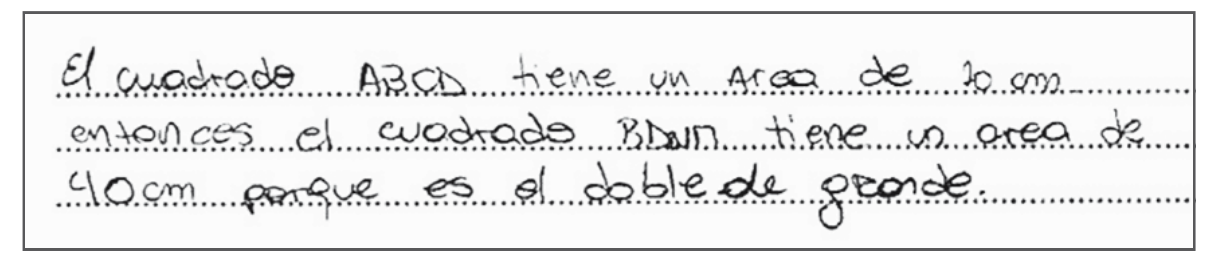
Muchos alumnos partieron de una hipótesis falsa, que consiste en afirmar que el área del cuadrado BDNM es el doble del área del cuadrado ABCD.

El área del cuadrado BDNM mide 10 cm, ya que este el
el doble del área del cuadrado ABCD

ABCD —> AB = 5cm
Si los lados del cuadrado ABCD miden 5cm. entonces
el lado del cuadrado BD = 10Cm.
Para calcular cuánto es el área del cuadrado:
10 x 4 = 40cm
El Area del cuadrado es 40cm.

[8] *Appropriation du savoir lutter : mise en évidence d'obstacles chez des élèves de cinquième. Sauvegrain Jean-Paul, Terrisse André, Carnus Marie-France, G.R.D.A.P.S.-LEMME, Université Paul Sabatier, Toulouse. La cita de Brousseau ha sido extraida el texto citado.*

Pareciera que la base de la idea es puramente visual. Es decir que estos alumnos observaron la figura y decidieron que los lados del cuadrado mayor son el doble de los lados de ABCD. No buscaron una explicación para este hecho, sino que creyeron en su percepción y consideraron que era suficiente.


El cuadrado ABCD tiene un area de 20 cm
entonces el cuadrado BDNM tiene un area de
40cm porque es el doble de grande.

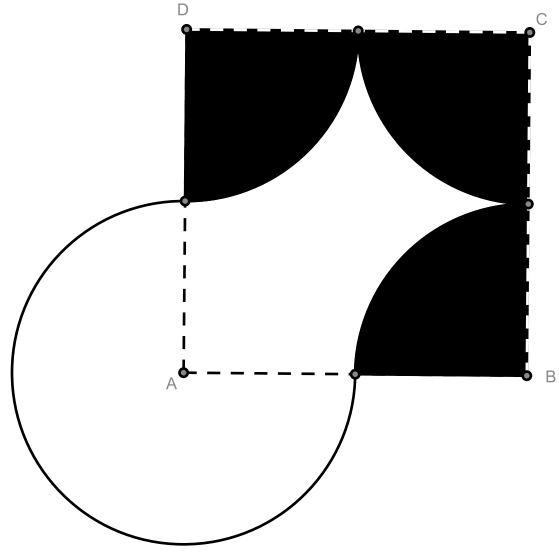
"El cuadrado ABCD tiene un area de 20 cm entonces el cuadrado BDNM tiene un area de 40 cm porque es el doble de grande."

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE ÁREAS

Los siguientes problemas constituyen dos ejemplos del tipo de actividad que consideramos puede proponer un trabajo geométrico interesante a los alumnos. No constituyen una secuencia y será necesario hacer un análisis con detenimiento para decidir cuáles son los conocimientos necesarios para poder resolverlos y si pueden utilizarse en una clase.

Problema 1

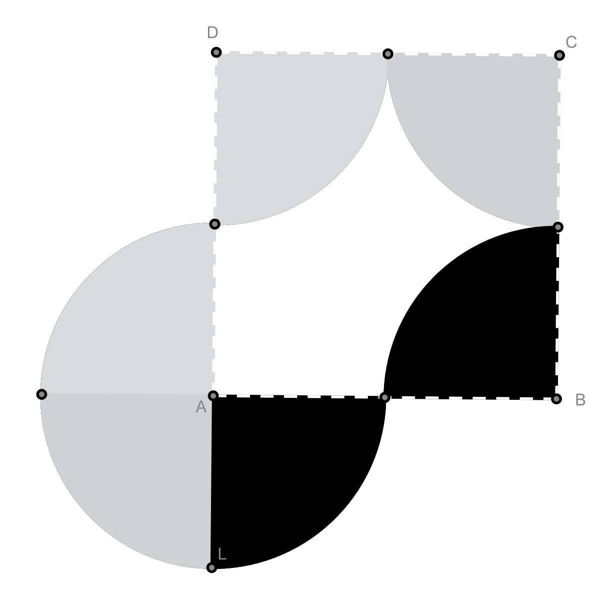
ABCD es un cuadrado del que no se conocen sus medidas. Compará el área de la figura blanca con la del cuadrado. [9]



[9] *Tomado de Philibert Clapponi, 1997. Op. Cit.*

Un punto que puede ser necesario plantear y discutir es acerca de la imposibilidad de medir. No se conoce la medida del lado del cuadrado, pero esto no significa que sea posible asignarle una, sino que es una medida cualquiera. Pero además, esto implica que la relación entre las áreas que se busca será la misma independientemente de la medida del lado del cuadrado. Se propone una figura sin sus medidas para que los alumnos se vean en la situación de tener que resolver el problema de manera más general.

Hay diferentes estrategias de resolución. Una de ellas se apoya en la mera comparación de áreas:



En cada uno de los vértices B, C y D se han dibujado cuartos de circunferencia de radio la mitad del lado del cuadrado. Por otro lado, la parte del gráfico que es externa al cuadrado también está formado por tres cuartos de círculo de centro A y radio la mitad del lado del cuadrado.

Si se los "reubica" –tal como lo indican los cuartos de circunferencias que tienen el mismo color-, puede verse que con la figura curva es posible cubrir exactamente el cuadrado, por lo que tienen igual área.

También es posible hallar expresiones para las áreas de cada una de las figuras, lo cual lleva a un trabajo más apoyado en un marco algebraico. Si el cuadrado tiene lados de medida L, su área será L^2.

El área de la figura curva podrá hallarse como suma de dos áreas, la que es interna al cuadrado más la que es externa. El área de la parte de la figura que es interior al cuadrado puede hallarse como diferencia entre el área del cuadrado y los tres cuartos de circunferencia, es decir:

$$L^2 - 3 \times \frac{1}{4}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 - \frac{3}{16}\pi L^2$$

Para muchos alumnos no será simple encontrar una expresión para el área de una figura que no reconocen como una que han estudiado y para la que disponen de una fórmula.

El área de la parte de la figura que es externa al cuadrado es $3 \times \frac{1}{4}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}\pi L^2$.

El área total es $\left(L^2 - \frac{3}{16}\pi L^2\right) + \frac{3}{16}\pi L^2 = L^2$, que coincide con el área del cuadrado.

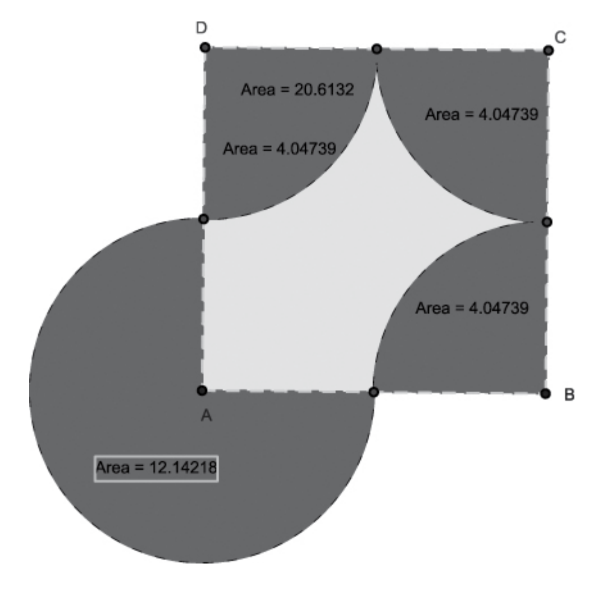
Luego, a través de dos formas muy diferentes de pensar el problema, es posible concluir que ambas figuras tienen igual área.

Una variante interesante consiste en pedir que los alumnos exploren la figura a través de un programa de Geometría, como GeoGebra[10]. En lo que sigue se abordará el trabajo con este programa dada su fertilidad, aunque asumimos que no es el único camino posible. Solo apelamos a él por las nuevas potencialidades que ofrece.

El programa será, desde nuestra perspectiva, un recurso o herramienta didáctica, que no reemplaza la acción del docente. Sostenemos que no es posible–en general- lograr un aprendizaje solo a partir de la interacción con un medio tecnológico. Se precisa de la intencionalidad e intervención del docente, entre muchas otras cosas.

A partir de la construcción de la figura en GeoGebra, es posible hallar las áreas del cuadrado y de cada uno de los cuartos de círculo. Al cambiar el tamaño de la figura y analizar la relación entre las medidas de las áreas, los alumnos podrán elaborar hipótesis, que luego deberán cotejar a través de relaciones geométricas y/o mediante el álgebra.

[10] Puede bajarse en forma gratuita del sitio http://www.geogebra.org/cms/



A decir de Abraham Arcavi [11]

"Los ambientes dinámicos no sólo les permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y por lo tanto visualizarlas, sino que también le permite al usuario transformar construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir hacia la formación del hábito de transformar (o bien mentalmente o por medio de una herramienta) un ejemplo particular, para estudiar las variaciones, visualmente da indicios de invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de conjeturas y proposiciones matemáticas."

Es decir que en un caso como este, la computadora brinda la posibilidad de modificar la figura (a través de una homotecia) sin que varíen las relaciones entre los elementos que la constituyen. De ese modo, se tiene la posibilidad de hipotetizar acerca de las variaciones e invariantes y obtener ideas, aportar a la intuición que constituirá una base para elaborar una explicación formal de la relación hallada.

Las computadoras, además de permitir una visualización, brindan a los alumnos la posibilidad de aprender a experimentar y de apreciar la utilidad de obtener muchos ejemplos, entre ellos algunos extremos. En ellos se puede además medir, comparar, transformar. De este modo, los ejemplos obtenidos a partir de experimentaciones pueden ser la base hacia la observación de una generalidad y su enunciación.

No todos los problemas son aptos para un trabajo exploratorio en computadora. Se busca que las situaciones planteen preguntas que acompañen la experimentación, que los lleve a predecir ciertos resultados. *"El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generado cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas. […] Éste puede ser el detonante para nutrir la propia necesidad de los estudiantes para re-analizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo."*[12]

[11] Arcavi, A. (2000). Op. Cit.
[12] Arcavi, A. (2000). Op. Cit.

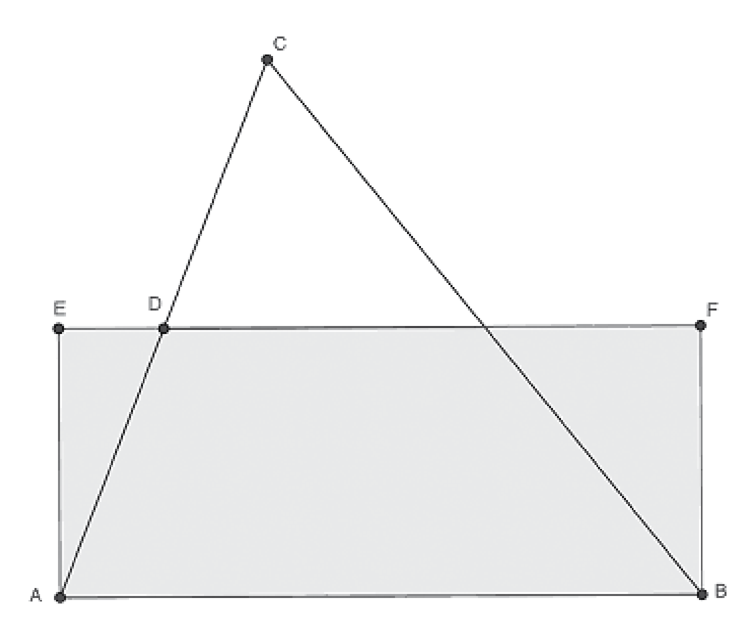
Las sorpresas se originan en la diferencia entre una expectativa explícita acerca de una acción y el resultado de esa acción, aunque para que esto ocurra es necesario advertir acerca de la conveniencia de que los alumnos anoten sus anticipaciones para contrastar con los resultados que obtienen.

La retroalimentación a partir de la acción la da el programa. Se trata de una retroalimentación que potencialmente es más efectiva que la que proporciona el profesor, no solamente por la carencia de juicios de valor y la privacidad de la misma, sino porque puede provocar el deseo de volver a verificar, de revisitar la predicción y, eventualmente puede generar en el alumno la necesidad de algún tipo de explicación, camino hacia una demostración. Claramente, lo recién descripto solo puede darse en la medida que existan los conocimientos necesarios para apreciar y resignificar la retroalimentación. No solo es necesario que los alumnos dispongan de conocimientos matemáticos, sino que es preciso disponer también de conocimientos referidos al quehacer matemático, que los alumnos estén habituados a analizar inconsistencias, que dispongan de estrategias para la exploración y que se sumerjan en la búsqueda o pedido de explicaciones que fundamenten los resultados encontrados o las relaciones establecidas.

Problema 2

En la siguiente figura se muestra un triángulo ABC. D es el punto medio del lado AC y ADFB es un rectángulo.

¿Qué relación hay entre el área del rectángulo AEFB y la del triángulo ABC?

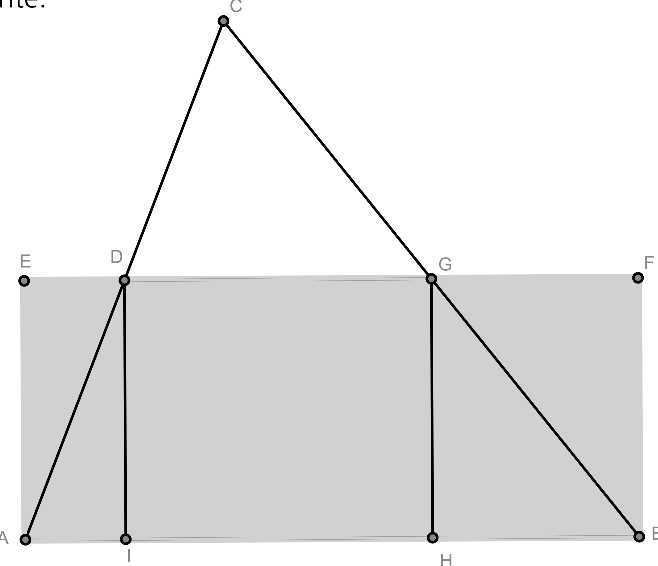


A través del uso de GeoGebra es posible comparar las áreas del rectángulo y el triángulo y ver que son iguales. Sin embargo, el programa no da la posibilidad de saber por qué lo son. Para ello será necesario que los alumnos pongan en juego sus conocimientos geométricos.

Una vez finalizada la etapa de exploración, que permite elaborar la hipótesis de que las áreas en cuestión son iguales, es necesario iniciar una nueva etapa de trabajo focalizada en explicar aquello que se supone que es cierto.

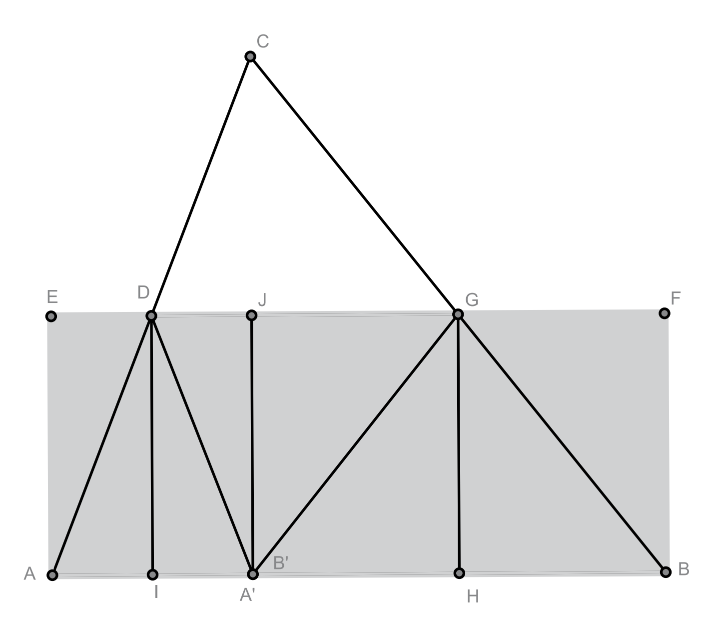
No todos los alumnos han construido un modo de explorar en matemática y, muchos menos en geometría. Es por eso que este no puede ser el primer problema que requiera de ese tipo de trabajo.

Es posible que algunos alumnos intenten buscar relaciones como la siguiente:

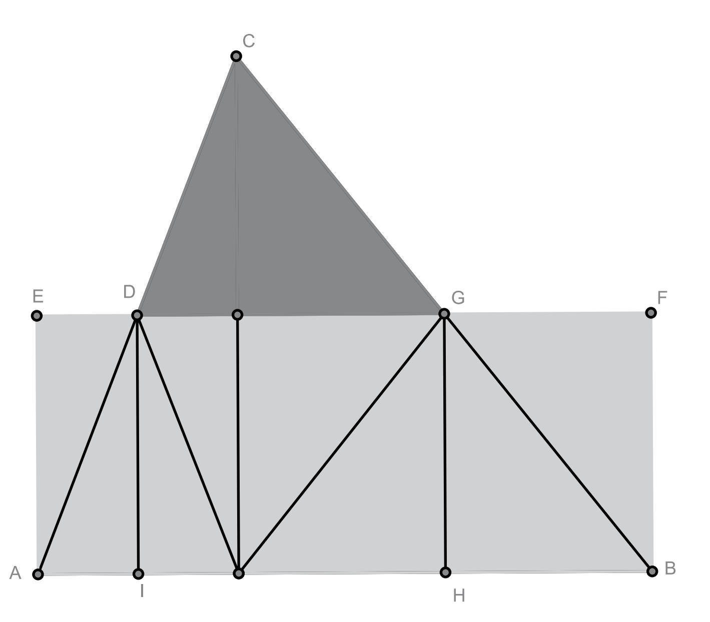


Los triángulos AED y AID son iguales, al igual que los triángulos HGB y GFB.

Si se continúa buscando triángulos iguales, podrán encontrarse los siguientes:



Pero también podrá verse que hay otros:



El triángulo DJC es igual al triángulo EDA, mientras que los triángulos JCG y GFB también son iguales. Este cubrimiento del rectángulo y del triángulo permite ver tanto para el cuadrilátero AEFB como para el triángulo ACB son necesarios 4 triángulos iguales a EDA y cuatro iguales al triángulo GFB. En consecuencia, ambas figuras tienen igual área. También alcanza con comparar las partes no comunes entre ambas figuras: el triángulo DCG con los triángulos AED y BGF. Si se traza la altura del triángulo DCG quedan definidos los triángulos JDC y JCG. No resulta complicado analizar que $J\overset{\Delta}{D}C = E\overset{\Delta}{D}A$ y $J\overset{\Delta}{C}G = G\overset{\Delta}{F}B$.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Las producciones que hemos mostrado, los análisis y problemas propuestos están al servicio de repensar la práctica docente, los errores consistentes y sistemáticos de los alumnos para poder capitalizarlos y así ayudarlos a aprender más y mejor.

No se trata de recetas mágicas, porque no existen, sino de poder entender mejor qué ponen en juego los alumnos a la hora de resolver problemas y de qué manera la enseñanza puede aportar u obstaculizar sus aprendizajes.

ANEXO. GRILLA DE CORRECCIÓN DEL ÍTEM ABIERTO DE 2° /3° AÑO

EDUCACION SECUNDARIA
MATEMATICA
Prueba ONE 2010
Grilla de Codificación de las Actividades para desarrollar
2° /3° año

1 En dos floreros se colocan 54 flores. Si en el primero se colocan la mitad de las flores que en el segundo. ¿Cuántas flores hay en cada florero?

Mostrá como lo resolvés.

....

....

....

....

P09 M9 A1 IT01

Guía de corrección:

Respuesta correcta	Subcódigo Responde 36 y 18 flores 31 Resuelve el problema por un procedimiento válido y obtiene la respuesta correcta. **Ejemplo 1** Plantea las ecuaciones: $x+\frac{x}{2}=54 \Rightarrow \frac{3x}{2}=54 \Rightarrow x=\frac{108}{3} \Rightarrow x=36 \Rightarrow y=18$ **Ejemplo 2** $x+2x=54 \Rightarrow 3x=54 \Rightarrow x=\frac{54}{3} \Rightarrow x=18 \Rightarrow y=36$ **Ejemplo 3** $54 \div 3 = 18$ entonces un florero tiene 18 y el otro $18 \times 2 = 36$.
Respuesta parcialmente correcta	Subcódigo 21 Procedimiento válido pero con algún error de cálculo Ejemplo $y=\frac{54.3}{2}=81$ 22 Plantea alguna ecuación pero no reemplaza, no opera, no continúa.
Respuesta Incorrecta	Subcódigo 11 **Ejemplo 1** 54 : 2 =27 54 - 27 = 27 **Ejemplo 2** 27:2 = 13,5 o bien 27 + 13,5 o bien 54 + 13,5 o puede considerar número entero 13 o 14. 15 Respuesta correcta con procedimiento incorrecto 16 Otras respuestas incorrectas 17 Respuestas tachadas, borradas, dibujos o expresiones no pertinentes con la tarea propuesta. 18 Respuesta no sé, no lo vimos, no lo entiendo.
Respuesta omitida o en blanco	99
Mal impreso	77

BIBLIOGRAFÍA

ARCAVI, Abraham. Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), p. 24-35, 1994.

ARCAVI, Abraham; HADAS, Nurit. COMPUTER MEDIATED LEARNING: AN EXAMPLE OF AN APPROACH. International Journal of Computers for Mathematical Learning 5: 25—15, 2000. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

BERTÉ, Annie. PROGRESSIONS ET PROBLÉMATIQUES EN GÉOMÉTRIE À PARTIR D'UN EXEMPLE. L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE. «Petit X» N 45, pp. 41 à 54, 1996 -1997.

BRIZUELA, Bárbara, SCHLIEMAN, Analúcia. TEN-YEAR-OLD STUDENTS SOLVING LINEAR EQUATIONS. For the Learning of Mathematics 24, 2 (July, 2004). FLM Publishing Association, Kingston, Ontario, Canada. Disponible en http://ase.tufts.edu/education/faculty/docs/FLM%20-%20Brizuela.pdf (agosto de 2011)

CLAPPONI, Philibert. COMPARER DES AIRES. «Petit X» N 45, pp. 59 à 79, 1996 -1997.

CLEMENTS, Douglas H., SARAMA, Julie. Computers Support Algebraic Learning. Algebraic Thinking. Grades K-12. Readings from NCTM School Journals and other publications (Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 261-67). Barbara Moses ed.

COMBIER, Gérard, GUILLAUME, Jean-Claude, PRESSIAT, André. Les débuts de l'algèbre au collège au pied de la lettre! INRP, Institut National de Recherche Pédagogique, 1996.

FERRERO, Marta. ARTICULACIÓN DE REPRESENTACIONES EN ÁLGEBRA. Revista de Educación Matemática Vol 25 (2010), UMA, UNC. Disponible en http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_06.pdf (agosto 2011)

GERMI, Pierre-Emmanuel. STATUT DES LETTRES ET NOTION DE VARIABLE. «Petit X» N 45, pp. 59 à 79, 1996 -1997.

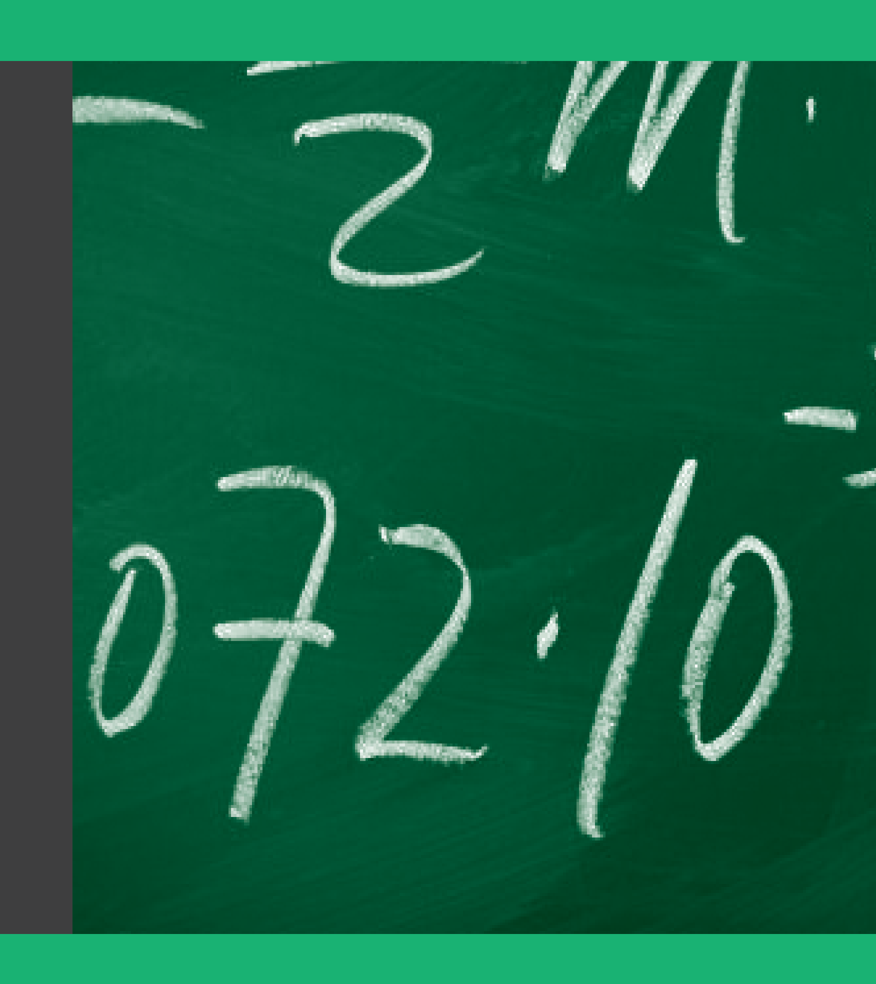
HITT, Fernando, CORTÉS, José Carlos. PLANIFICACIÓN DE ACTIVIDADES EN UN CURSO SOBRE LA ADQUISICIÓN DE COM-

PETENCIAS EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA Y USO DE CALCULADORA CON POSIBILIDADES GRÁFICAS. Revista digital Matemática, Educación e Internet, Vol 10 N 1, 1999. Disponible en http://www.cidse.itcr.ac.cr (agosto de 2011)

NOVEMBRE, Andrea. RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA. ÁREA: MATEMÁTICA DE 3°AÑO Y 6° AÑO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA. ONE 2007. DINIECE. MINISTERIO DE EDUCACION DE LA NACION, OCTUBRE DE 2010. Disponible en
http://diniece.me.gov.ar/index.php?option=com_content&task=view&id=9&Itemid=32 (junio de 2011)

PELLEQUER, Sylvie; BRONNER, Alain. POUR DEMARRER EN GEOMETRIE ET EN CLASSE DE 3EME: UNE SITUATION PROBLEMATIQUE. Petit X Num. 40. p. 65-85. IREM de Grenoble, Grenoble, France, 1995. Disponible en http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/40/40x6.pdf (junio de 2011)

SAUVEGRAIN, Jean-Paul, TERRISSE, André, CARNUS, Marie-France. APPROPRIATION DU SAVOIR LUTTER: MISE EN EVIDENCE D'OBSTACLES CHEZ DES ELEVES DE CINQUIEME. G.R.D.A.P.S.-LEMME, Université Paul Sabatier, Toulouse.




Ministerio de
Educación
Presidencia de la Nación


DiNIECE
Dirección Nacional de
Información y Evaluación
de la Calidad Educativa